

Теорема Фалеса

Теорема. Если на одной из двух прямых отложить последовательно несколько равных отрезков и через их концы провести параллельные прямые, пересекающие вторую прямую, то они отсекут на второй прямой равные между собой отрезки.

Дано: $l_1, l_2; A_1, A_2, A_3, A_4, \dots \in l_1; A_1A_2 = A_2A_3 = A_3A_4 = \dots;$

$A_1B_1 \parallel A_2B_2 \parallel A_3B_3 \parallel A_4B_4 \parallel \dots; B_1, B_2, B_3, B_4, \dots \in l_2.$

Доказать: $B_1B_2 = B_2B_3 = B_3B_4 = \dots$

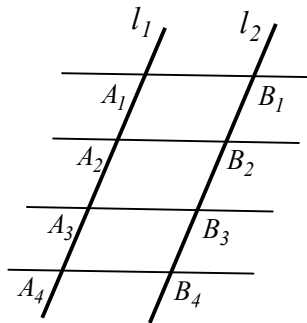


Рис. 1

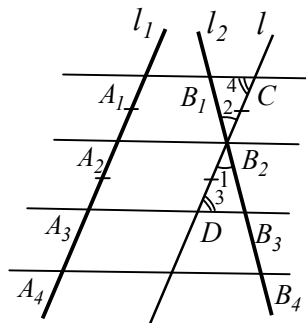


Рис. 2

Доказательство

I. Рассмотрим случай, когда $l_1 \parallel l_2$ (рис. 1).

Четырёхугольник $A_1B_1A_2B_2$ – параллелограмм по определению, так как $A_1B_1 \parallel A_2B_2$ по условию теоремы, $A_1A_2 \parallel B_1B_2$ как отрезки, лежащие на параллельных прямых l_1 и l_2 . В параллелограмме противоположные стороны равны, поэтому $A_1A_2 = B_1B_2$. Аналогично доказывается, что $A_2A_3 = B_2B_3$, $A_3A_4 = B_3B_4$; ... А так как $A_1A_2 = A_2A_3 = A_3A_4 = \dots$, то $B_1B_2 = B_2B_3 = B_3B_4 = \dots$

II. Рассмотрим случай, когда $l_1 \nparallel l_2$ (рис. 2).

Через точку B_2 проведём прямую $l \parallel l_1$, $l \cap A_1B_1 = C$, $l \cap A_3B_3 = D$. Так как $A_1A_2 = A_2A_3$, то $CB_2 = B_2D$ по пункту I. Рассмотрим получившиеся $\triangle B_2B_1C$ и $\triangle B_2B_3D$: а) $CB_2 = B_2D$ по доказанному выше; б) $\angle 1 = \angle 2$ как вертикальные углы; в) $\angle 3 = \angle 4$ как накрест лежащие углы, образованные при пересечении параллельных прямых A_1B_1 и A_3B_3 секущей l .

Следовательно, $\triangle B_2B_1C = \triangle B_2B_3D$ по II признаку равенства треугольников (по стороне и прилежащим к ней углам).

В равных треугольниках соответствующие элементы равны, поэтому $B_1B_2 = B_2B_3$. Аналогично доказывается, что $B_2B_3 = B_3B_4$.

Итак, если на одной из двух прямых отложить последовательно несколько равных отрезков и через их концы провести параллельные прямые, пересекающие вторую прямую, то они отсекут на второй прямой равные между собой отрезки.

Ч.т.д.